2- Binom Dağılımı :

X, t.d. ni n bağımsız denemenin başarılı olanlarının toplam sayısı olsun (Buradaki herbir deneme bernoulli denemesidir). Birtek deneme için başarılı olma olasılığı p, başarısız olma olasılığı q ise aşağıdaki şartları sağlayan X't.d.ye binom t.d. denir:

1- Herbir denemenin başarılı ve başarısız gibi iki sonucu vardır.

2- Denemeler birbirinden bağımsızdır. Gelen yapılıyorsa iadelidir.

3- Denemelerin toplam sayısı n'dir.

Böylece X, t.d. nin olasılık fonk.nu;

$$p(x,n,p)=\begin{cases}\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}, & x=0,1,\dots,n\\ 0, & d.h.\end{cases}$$

Beklenen değer ve varyansı:

$$E(x)=\sum_{R_X} x\cdot p(x)=\sum_{x=0}^{n} x\cdot\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n} x\cdot\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\cancel{x}\cdot\frac{n(n-1)!}{\cancel{x}\cdot(x-1)!\,(n-x)!}\,p\cdot p^{x-1}\cdot q^{n-x}$$

$$=n\cdot p\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-x)!\,(x-1)!}\cdot p^{x-1}\cdot q^{n-x}$$

$$=n\cdot p\cdot\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}\cdot p^{x-1}\cdot q^{n-x}$$

$$=n\cdot p\cdot\underbrace{(p+q)}_{=1}{}^{n-1}=n\cdot p$$

$$E(x^2) = \sum_{R_x} x^2 \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$, buroda $x^2 = x^2 - x + x = x(x-1) + x$ yazalım

$$= \sum_{x=0}^{n} \underbrace{[x(x-1)+x]}_{Fx} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\cdot(x-1)\cdot\binom{n}{x}\cdot p^x \cdot q^{n-x} + \underbrace{\sum_{x=0}^{n} x\cdot\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}}_{E(x)=n\cdot p}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\cdot(x-1)\cdot\frac{n!}{(n-x)!\cdot x!}\cdot p^x\cdot q^{n-x} + n\cdot p$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \cancel{x\cdot(x-1)}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-x)!\,\cancel{x\cdot(x-1)}\cdot(x-2)!}\cdot p^2\cdot p^{x-2}\cdot q^{n-x} + n\cdot p$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!\cdot(x-2)!}\cdot p^{x-2}\cdot q^{n-x} + np$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2}\cdot p^{x-2}\cdot q^{n-x} + n\cdot p$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot (\underbrace{p+q}_{=1})^{n-2} + n\cdot p$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np$$

$$\Rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2}$$
$$= np\cdot(1-p) = n\cdot p\cdot q$$

ÖRNEK: 4 yalnış, 1 doğru cevabı bulunan bir sınavda 20 soru soruluyor. X, t.d. doğru işaretlenen soru sayısını gösterdiğine göre

a.) Herhangi bir öğrencinin sınavdan 50 alma olasılığı nedir.

b.) 100 alma olasılığı nedir.

c.) Öğrencinin hiç doğru cevap vermeme olasılığı nedir.

d.) Beklenilen doğru cevap sayısını bulu

Çözüm: X; t.d. doğru işaretlenen soru sayısı olmak üzere

$n = 20 \quad , \quad p = \frac{1}{5} \quad , \quad q = \frac{4}{5}$

a.) Öğrencinin 50 alma olasılığı,

$$p(x=10) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$
$$= \binom{20}{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-10}$$

b.) Öğrencinin 100 alma olasılığı;

$$p(x=20) = \binom{20}{20} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{20} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-20} = \left(\frac{1}{5}\right)^{20}$$ //

c.) Hiç doğru cevap verememesi;

$$p(x=0) = \binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-0} = \left(\frac{4}{5}\right)^{20}$$ //

~~d~~) Beklenen doğru cevap sayısı,

$$E(x) = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{5} = 4 \text{ tane}$$ //

---

* Bernoulli

Teorem: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız t.d.ler olsun. $X = X_1 + \ldots + X_n$ tanımlansın.

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$$
$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$$
$$M_{X_1 + \ldots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$
$$\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(t)$$ olur.

$X_1, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız bernoulli değişkenleri ise $X = \sum^{n} X_i$ olmak üzere

$X \sim Bn(n, p)$ olur.

X_i'ler bağımsız bernoulli t.d.ler

$E(X) = p + \cdots + p = n.p$

$V(X) = p.q + \cdots + pq = npq$

$E(e^{tX}) = E(e^{tx_1}) \cdots E(e^{tx_n})$

$M_X(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t) = (q + p e^t) \cdots (q + p e^t)$

$= (q + p e^t)^n$,,

$\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{x_i}(t) = (p e^{it} + q) \cdots (p e^{it} + q)$

$= (p . e^{it} + q)^n$ olur.

binom dağılımının moment çıkaran, ve karakteristik fonksiyonlarıdır.